Mit Euklid das Beweisen verstehen

Mario Gerwig

1. Zusammenfassung

Beweisen kann im Schulunterricht aus guten Gründen nicht axiomatisch-deduktiv vorgehen (vgl. Jahnke/Ufer 2015, 333), zugleich ist der Begriff des Beweisens aber eng an das axiomatische Verfahren geknüpft. Der vorliegende Beitrag stellt eine mehrfach erprobte Möglichkeit vor, wie im Unterricht der Klasse 7-9 die axiomatische Methode genetisch-dramaturgisch entwickelt und eine erkenntnistheoretische Reflexion über das Beweisen initiiert werden kann. Zentral sind dabei Euklid von Alexandria und sein Jahrtausendbuch „die Elemente“ (um 300 v. Chr.). Denn in dieser Entdeckung der axiomatischen Methode zeigt sich der bis heute entscheidende Entwicklungssprung von der praktischen Rechen- und Messkunst der Ägypter zur auf Definitionen, Sätzen und Beweisen aufbauenden Wissenschaft, die wir heute Mathematik nennen.

2. Vorbemerkung

Die vorliegenden Ausführungen beziehen sich auf die rund 12-stündige, lehrkunstdidaktisch gestaltete Unterrichtseinheit „Die Entdeckung der Axiomatik“ (vgl. Gerwig 2015, 119-191), die aus Platzgründen an dieser Stelle nicht umfassend beschrieben werden kann. Viel mehr soll der Fokus auf der genetischen Entwicklung des für die Schülerinnen und Schüler ersten vollständigen Beweises und dem damit verbundenen Potential der genetischen Entdeckung der axiomatischen Methode liegen. Zum besseren Verständnis folgt vor der Auseinandersetzung mit diesem Aspekt (Abschnitte 5-6) nach einer knappen Einordnung der nicht zu überschätzenden Leistung Euklids (Abschnitt 3) zunächst ein tabellarischer Überblick über das Lehrstück sowie eine Kurzbeschreibung der einzelnen Akte (Abschnitt 4).

3. Euklids Sternstunde

Um die Bedeutung und Entwicklung der ägyptischen, babylonischen und griechischen Mathematik möglichst gut einordnen zu können, sind neben antiken Bauwerken insbesondere babylonische Steintafeln und ägyptische Papyri wichtige Zeugen. Deren genaue Analyse zeigt, dass sich die babylonische und ägyptische Mathematik aller Wahrscheinlichkeit nach vor allem für den praktischen Gebrauch wie der Berechnung von Lohnsummen oder der Projektierung von Bauwerken entwickelt hat (vgl. Meschkowski 1961; Wußing/Arnold 1978). Theoretische Fragestellungen wurden wohl kaum verfolgt, was zu einer jahrtausendelangen Konservierung der praktischen Rechen- und Messkunst führte (vgl. Freud 1990). Den Sprung zu einer wissenschaftlichen Fundierung der Mathematik schafften erst die Griechen. Bei ihnen durchlief die Mathematik innerhalb einer vergleichsweise kurzen Zeitspanne eine enorme Entwicklung und erstmals finden sich ernsthafte Ansätze einer argumentierenden und beweisenden Denkweise: „Die von den Griechen überlieferten Aufzeichnungen unterscheiden sich von den ägyptischen Papyrusrollen und den babylonischen Tontafeln dadurch, dass die Griechen in erster Linie die Erklärung der Zusammenhänge suchten. Sie waren es, die die Beweisführung in der Mathematik geschaffen haben, was bis heute ein grundlegendes Merkmal dieser Wissenschaft geblieben ist“ (Freud 1990, 21). Ein wahrhaftiger Paradigmenwechsel: Von der praktischen Rechen- und Messkunst weiter zur Mathematik, von der ägyptischen Kenner- und Könnerschaft zur griechischen Wissenschaft.
Personifiziert wird dieser einmalige und bis heute bedeutsame Übergang durch Euklid von Alexandria und sein Jahrtausendwerk „die Elemente“, womit „die griechische Mathematik das erste wissenschaftliche System geschaffen und damit einen Höhepunkt erreicht (hat)“ (Popp 1999, 23). Darin fasst Euklid um 300 v. Chr. das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit zusammen und erstmals wird jeder einzelne Satz in klarer Art und Weise durch logisches Zurückführen auf zuvor bereits bewiesene Entdeckungen bewiesen. Am Anfang dieser Argumentationskette stehen Definitionen, Postulate und Axiome.
Es ist nicht weniger als die Entdeckung der Axiomatik, welche von diesem Augenblick an einen Siegeszug durch alle Länder und Epochen durchlief. Der Einfluss der von Euklid entwickelten axiomatischen Methode ist bis heute und weit über die Mathematik hinausgehend spürbar: Nach der Renaissance der „Elemente“ im 16. und 17. Jahrhundert versuchten auch andere Disziplinen

plötzlich nach dem Vorbild der Geometrie ihre Ergebnisse aus axiomatischen Grundsätzen herzuleiten (vgl. Gerwig 2015, 27) – man denke bspw. an Descartes' Vernunftgebrauch (1641), Spinozas Ethik (1677) oder Newtons Mechanik (1686).

4. Kurzbeschreibung: Die Entdeckung der Axiomatik im Unterricht

Das im Folgenden in aller Kürze beschriebene Lehrstück basiert auf einer Skizze Martin Wagenscheins (1896-1988), in welcher er den bedeutenden Entwicklungssprung der Mathematik an einem einfachen geometrischen Phänomen entwickelt (vgl. Wagenschein 2008, 125-150). Das Lehrstück stellt das erste von insgesamt drei Lehrstücken zum Beweisen dar – die Lehrstücke zum Satz des Pythagoras und zum Nichtabbrechen der Primzahlfolge ergänzen die Beweis-Trilogie (vgl. Gerwig 2015) – und ermöglicht eine erste, ehrliche Begegnung mit dem für die Mathematik so zentralen Beweisbegriff.

4.1 Überblick

Gliederung	Umfang	Titel/Inhalt
Ouvertüre	2 Stunden	Die Zirkelrose als Gemeinsamkeit vielfältiger geometrischer Wunder aus Natur und Kultur
I. Akt	1 Stunden	Die Warum-Frage als Motor des Suchprozesses: Warum lässt sich der Radius eines beliebigen Kreises genau sechsmal auf dem Rand abtragen?
II. Akt	3 Stunden	Die strategische, gemeinsame Suche nach einer Begründung
III. Akt	2 Stunden	Analyse des euklidischen Beweises; Entdeckung seiner zehn Axiome
Epilog	4 Stunden	Entdeckung, Beweis und Anwendung des Satz des Thales

Tab. 1: Aufbau des Lehrstücks „Entdeckung der Axiomatik" (vgl. Gerwig 2015).

4.2 Kurzbeschreibung

In der ***Ouvertüre*** entdecken die Schülerinnen und Schüler eine Gemeinsamkeit zahlreicher unterschiedlicher, facettenreicher geometrischer Formen aus Natur und Kultur (Haeckel 1899/2009, Bentley 1898/2000, Cowen 1979): Alle basieren auf einem regelmäßigen Sechseck. Die entsprechende Konstruktion mit Zirkel und Lineal klingt zunächst einfach: Zeichnet man einen Kreis mit beliebigem Radius, erhebt anschließend einen beliebigen Punkt des Kreises zum Mittelpunkt eines neuen Kreises gleichen Radius' und verfährt mit den sich ergebenden Schnittpunkten gleich, so erhält man eine regelmäßige, blütenförmige Figur (Zirkelrose). Zeichnet man die Radien der sechs äußeren Kreise ein, entsteht ein regelmäßiges Sechseck (vgl. Abb. 1). Diese Konstruktion jedoch offenbart ein zentrales Problem: Schließt sich die Zirkelrose tatsächlich genau? Und wenn ja, warum?

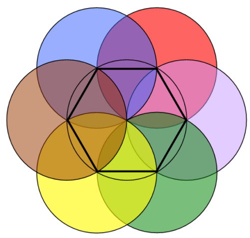

Abb. 1: Zirkelrose

Während die Frage nach der Genauigkeit über den Sokratischen Dialog von Alfréd Rényi (vgl. Rényi 1966; Kurzform in Gerwig 2015, 382f) zum Phänomen der Idealität geometrischer Figuren führt, entpuppt sich die Warum-Frage als zentrales, reizvolles, ganz und gar nicht selbstverständliches Problem. Im ***I. Akt*** wird die Frage mathematisch formuliert: Warum lässt sich der Radius eines beliebigen Kreises genau sechsmal auf dem Kreis abtragen? Durch die Entwicklung einiger metakognitiver Problemlöse-Strategien wird eine gute Ausgangsbasis für die Aufklärung und Entschlüsselung des Problems geschaffen (vgl. Heinrich/Bruder/Bauer 2015, 291). Im ***II. Akt*** wird mithilfe dieser Strategien und in mehreren Ich-Du-Wir-Phasen (Barzel/Büchter/Leuders 2007, 118-123) das Problem schließlich Schritt für Schritt aufgeklärt. Abb. 2 zeigt die einzelnen Schritte der induktiven Entwicklung, die Formulierung der Auflösung erfolgt schließlich deduktiv (beim letzten Schritt beginnend): Es ist in der Ebene in jeder Richtung immer möglich, eine Figur (z. B. ein Dreieck) so zu verschieben, dass seine Punkte Spuren zurücklegen, die gerade, gleich lang und parallel sind (Parallelverschiebung). Das ist selbstverständlich. Deshalb kann man ein an einer Geraden anliegendes, gleichseitiges Dreieck um genau eine Seitenlänge verschieben (Schritt 6). Die Spitzen zwischen den Dreiecken in den beiden Positionen sind also genau eine Dreiecksseitenlänge voneinander entfernt. Deshalb passt ein drittes, gleichseitiges Dreieck zwischen zwei nebeneinander an einer Geraden anliegenden, gleichseitigen Dreiecke. Deshalb sitzen drei Dreiecke *fugenlos* aneinander auf einer Geraden (5). Deshalb kann man eine ebensolche Dreiergruppe von der anderen Seite der Geraden heran schieben, so dass ein *fugenloses* Sechseck entsteht (4). Durch seine Ecken führt ein Kreis (3), dessen Radius ist genau sechsmal in der Peripherie herum gespannt (2, 1).

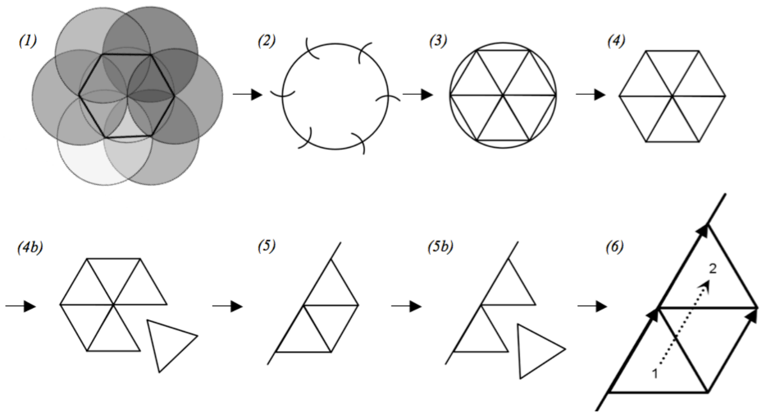

Abb. 2: Visualisierung der einzelnen Beweisschritte.

Nach der Formulierung dieser eigenen Begründung erfahren die Schüler im ***III. Akt***, dass sie einen mathematischen Beweis geführt haben: Sie haben ein anfängliches Problem logisch und induktiv zurückgeführt auf die allgemeine Selbstverständlichkeit der ebenen Dreiecksverschiebung. Ein Vorgehen, welches der axiomatischen Methode Euklids in besonderer Weise entspricht. Im Anschluss an diesen eigenen Beweis lernen die Schülerinnen und Schüler die Elemente Euklids kennen und versuchen, seinen 2.500 Jahre alten Beweis für das identische Problem zu verstehen (Kapitel IV, Satz 15). Die Analyse der Beweisstruktur führt schließlich zur Entdeckung, dass der Beweis Euklids auf nur wenigen Grundsätzen, sogenannten Axiomen, Definitionen und Postulaten beruht und dass die gesamten Elemente auf gerade einmal zehn Axiomen aufgebaut sind. Eine Szene aus dem Historiendrama „Lincoln“ (2012), in welcher der amerikanische Präsident voller Evidenz und unter Bezugnahme auf das erste Axiom Euklids sein Menschenbild erläutert, spannt schließlich einen 2.000 Jahre umfassenden Bogen von den antiken Elementen zu einer der zentralsten Personen der Menschheitsgeschichte.
Im ***Epilog*** wird das Erarbeitete auf ein neues Problem übertragen. Auf dem Schulhof stehen sich zwei Schüler einige Meter voneinander entfernt gegenüber, die übrigen stehen auf einem Halbkreis davor. Nun geht der Blick vom einen Schüler zum andern und zurück: Immer eine viertel Umdrehung? Immer? Zurück in der Klasse wird diese Entdeckung – später wird sie „Satz des Thales“ heißen – formuliert und wiederum durch Zurückführung auf eine Dreiecksverschiebung bewiesen.

5. Im Fokus: Die Entwicklung des Beweises (II. Akt)

5.1 Blitzlicht aus dem Unterricht einer 8. Jahrgangsstufe (März 2012)

II. Akt, zweite Stunde (letzter Schritt des Beweises; vgl. Gerwig 2015, 159f)
Die ersten Schritte des Beweises wurden bereits in Ich-Du-Wir-Phasen erarbeitet, die entsprechenden Skizzen an der Tafel entwickelt, verschiedene Ideen wurden diskutiert. Nun stehen wir an einer Klippe (vgl. Abb. 2, Schritt 5b): Zwei gleichseitige Dreiecke liegen nebeneinander an einer Geraden an. Passt ein drittes Dreieck in die Lücke? Wenn wir dieses Problem, welches aus der ursprünglichen Fragestellung logisch abgeleitet wurde, bewältigen und begründen können, dass es immer funktionieren *muss*, dann haben wir es geschafft!
Ich kündige an, dass ich für den nächsten Schritt eine Hilfe vorbereitet hätte. Aus meiner Tasche ziehe ich ein gleichseitiges Pappdreieck, welches auf einer Seite mit Styropor beklebt ist, in welches wiederum fünf Löcher eingearbeitet wurden. In jedem dieser Löcher steckt ein Stück farbige Kreide. Ich fasse noch einmal zusammen, wo wir gerade stehen. „Wir haben unser Ausgangsproblem Schritt für Schritt vereinfacht bis zu der folgenden Fragestellung: Lassen sich drei gleichseitige Dreiecke nebeneinander an einer Geraden anlegen? Oder anders: Wenn zwei Dreiecke nebeneinander an einer Geraden anliegen, passt dann ein drittes Dreieck in die Lücke?“
Ich erläutere anhand der entsprechenden Skizze, dass wir die beiden nebeneinander anliegenden Dreiecke jetzt nicht mehr als zwei verschiedene Dreiecke, sondern als ein Dreieck in zwei unterschiedlichen Positionen betrachten und dieses Dreieck nun aus der ersten in die zweite Position verschieben wollen. „Diese Verschiebung werde ich Euch kommentarlos mithilfe des Papp-Kreidedreiecks vorführen.“ Ich versuche die Schüler weiter zu motivieren, dass

mithilfe dieser Dreiecksverschiebung unsere Fragestellung unmittelbar zu beantworten ist. Deshalb soll im direkten Anschluss jeweils eine zweiminütige Ich- und Du-Phase beginnen, in welcher die Schüler intensiv miteinander um die Antwort ringen können. Die Konzentration ist in dieser Phase unheimlich hoch, eine neugierige Anspannung liegt in der Luft. Ich gehe zur Tafel und verschiebe kommentarlos das Dreieck langsam und für alle sichtbar aus der ersten in die zweite Position. Bei der Verschiebung entstehen fünf farbige, zur Grundlinie und untereinander parallele und gleich lange Linien (vgl. Abb. 3). Als ich fertig bin lege ich das Dreieck auf das Pult und beobachte die Schüler. Noch immer ist es sehr ruhig, alle blicken konzentriert zur Tafel. Nach rund einer halben Minute ist Melina die erste, die ein verstehendes „Ah!“ ausruft, ihr folgen Maida und Nives. Ich erkundige mich bei ihnen, leise teilen sie mir ihre Idee mit. Da diese stimmt bitte ich Melina, der Klasse eine weitere Hilfe zu geben, wobei sie allerdings nicht sprechen darf. Sie überlegt kurz, nimmt das Dreieck vom Pult und hält es mit einer Seite nacheinander an alle farbigen Linien auf der Tafel. Damit verdeutlicht sie, dass diese offenbar alle die gleiche Länge haben, nämlich die Länge einer Dreiecksseite. Ich erinnere an den Phasenwechsel, die Du-Phase beginnt, und mit ihr eine rege Diskussion. An immer mehr Stellen höre ich freudige Ausrufe der Erkenntnis, die Selbstverständlichkeit der Dreiecksverschiebung, das Durchschauen des anfänglichen Problems, die Axiomatik wird augenfällig! In der anschließenden Plenums-Phase beschreibt Hanna: „Bei der Verschiebung sind farbige Linien entstanden, die alle gleich lang sind. Deshalb muss ein weiteres Dreieck in die Lücke passen.“ Ich kommentiere, dass ihre Beobachtung richtig und sie auf einem guten Weg sei, dass jedoch noch Argumente fehlen. Maida ergänzt: „Alle Linien sind außerdem gleich lang.“ Ich bitte sie, ihre Aussage zu konkretisieren: „Wie lang genau?“ – „So lang wie eine Seite des Dreiecks.“ Ich nehme das Dreieck vom Pult und halte es, wie Melina zuvor, nacheinander an die farbigen Linien – tatsächlich, die Linienlängen entsprechen anscheinend einer Dreiecksseite. Das muss auch so sein, denn genau um diese Länge ist das Dreieck ja verschoben worden. „Diese Linien geben also an, welche Strecke ein Punkt des Dreiecks bei der Verschiebung zurückgelegt hat. Für welche Punkte des Dreiecks gilt das?“ Noah erkennt sofort die Verallgemeinerung: „Natürlich für alle Punkte, die Kreidestücke könnten ja überall im Dreieck stecken.“ Nives verkündet stolz, dass sie die Lösung gefunden habe – sofort beginnt sie zu reden: „Zwischen allen Punkten der Dreiecke liegt der gleiche Abstand, d. h. auch zwischen den Spitzen der Dreiecke. Und da der Abstand genau einer Seitenlänge des Dreiecks entspricht, muss ein drittes Dreieck in die Lücke passen.“ Ihre Antwort ist einwandfrei, doch beim Blick in die Klasse stelle ich fest, dass ihr nicht alle folgen konnten. So bitte ich sie, ihre Argumentation langsam und an der Tafel mithilfe der Skizze zu wiederholen, was sie bereitwillig tut. Langsam scheint sich die Erkenntnis durchzusetzen, eine spontane, kurze Murmelphase sorgt für weitere Klärung. Melina fasst die Begründung anschließend an der Tafel noch einmal zusammen und beantwortet gemeinsam mit Nives exzellent einige Rückfragen. Mit dieser wuchtigen Erkenntnis beende ich die Stunde und bitte die Schüler, zu Hause diesen letzten Schritt ausgehend von der Problemfrage zu verschriftlichen. In der nächsten Stunde wird eine allgemeine Motivation für das Beweisen deutlich werden, wenn mit Euklid und seinen Elementen die historische Bedeutung der entdeckten Axiomatik zentral wird.

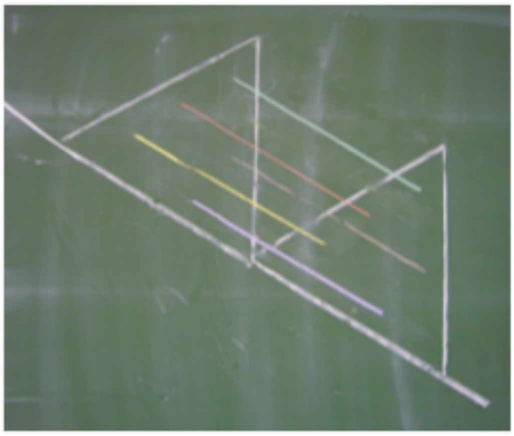

Abb. 3: Tafelbild zum letzten Beweisschritt.

5.2 Didaktische Anmerkungen

Der Erwerb von Akzeptanzkriterien einen mathematischen Beweis betreffend ist ein längerfristiger Enkulturationsprozess in die Argumentationskultur der Mathematik. Ein axiomatisch-deduktives Vorgehen im Unterricht verbietet sich, andere Ausgangsmöglichkeiten für diesen angestrebten Prozess sind daher erforderlich, bislang allerdings nicht ausreichend entwickelt (vgl. Jahnke/Ufer 2015, 342). Es scheint naheliegend, diesen Enkulturationsprozess auf dem alltäglichen und mathematischen Argumentieren aufzubauen. Brunner (2013, 108ff) hat diesbzgl. ein vielversprechendes „Prozessmodell des mathematischen Beweisens“ vorgelegt, welches das Potential des hier beschriebenen Lehrstücks unterstreicht (vgl. Abb. 4). Auf Basis eines reizvollen, geometrischen Initialphänomens und durch die Orientierung am alltagsnahen bzw. mathematischen Argumentieren wird durch die genetisch-dramaturgisch entwickelte Entdeckung der Axiomatik und die kulturhistorische Einordnung mit Euklid und seinen Elementen erstmals ein formal-deduktives Beweisniveau erreicht. Ein motivierender Einstieg in das komplexe Feld des mathematischen Beweisens scheint damit möglich zu sein, was bisherige Inszenierungen, Reflexionen und Schüler-Feedbacks des hier vorgestellten Lehrstücks unterstützen. Harte empirische Untersuchungen stehen jedoch noch aus.

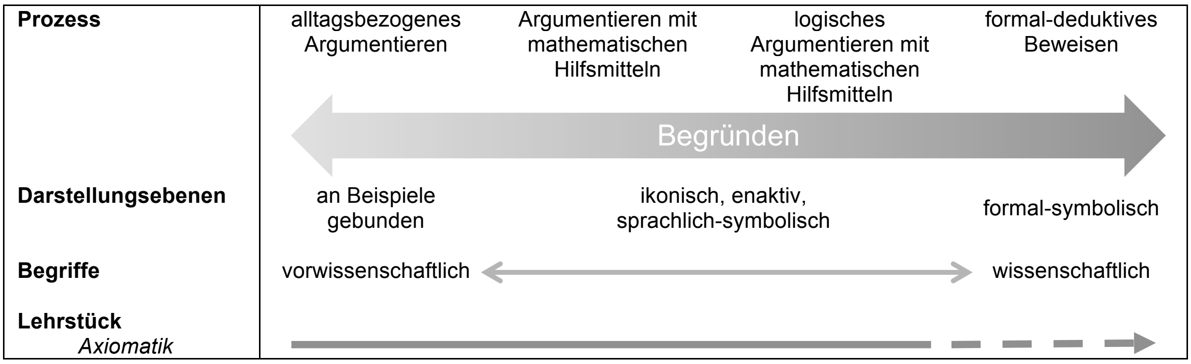

Abb. 4: Einordnung des Lehrstücks zur Axiomatik in das Prozessmodell des Beweisens (nach Brunner 2014, 49 und Gerwig 2015, 52).

Als Motor des gesamten Prozesses entpuppt sich die immer wieder und in anderen Formulierungen auftauchende Warum-Frage: Warum lässt sich der Radius eines beliebigen Kreises sechsmal in der Peripherie herumspannen? Warum lassen sich sechs gleichseitige Dreiecke rundherum zu einem fugenlosen Sechseck zusammenschieben? Warum lassen sich drei gleichseitige Dreiecke nebeneinander fugenlos an einer Geraden anlegen?
Der Übergang von der einen zur nächsten Warum-Frage wird stets ausgelöst durch die Beweisbedürftigkeit und -notwendigkeit der einzelnen Schritte. Die formulierten Fragen bzw. Probleme sind nicht evident, die Beantwortungsversuche nie gänzlich zufriedenstellend. Insbesondere in den Ich-Du-Wir-Phasen wird dies deutlich, die kritische Einstellung der Schülerinnen und Schüler der Sache und den Erklärungsversuchen gegenüber führt immer wieder zu einer Neu-Formulierung des vorliegenden Problems und damit zu einer Umformulierung der Warum-Frage. Erst in der dritten Variante der Problemstellung liegt eine klar zu beantwortende Formulierung vor: Mithilfe der Dreiecksverschiebung, deren Realisierbarkeit nicht weiter begründungsbedürftig ist, kann diese beantwortet werden. Von diesem Punkt aus können rückwärts nun auch die übrigen Zwischen-Formulierungen beantwortet und das Ausgangsphänomen schließlich aufgeklärt werden. Die Argumentationskette ist beendet, an deren Anfang steht die evidente Möglichkeit der Dreiecksverschiebung.
Diese Rückführung auf eine Selbstverständlichkeit ist eine echte Entdeckung, welche an dieser Stelle die Möglichkeit bietet, den historischen Wert der Axiomatik nachzuzeichnen. Denn „neben das Aufzeigen der Beweisbedürftigkeit einzelner Sätze muss im Unterricht eine *allgemeine Motivation des Beweisens* treten. Diese müsste in einer allgemeinen Erklärung bestehen, was das Beweisen ist, warum es in der Mathematik eine so große Rolle spielt und wie das mathematische Beweisen zu einer denkenden Erfassung der Welt beiträgt“ (Jahnke/Ufer 2015, 342). Mit Euklid und seiner Leistung kann eine erkenntnistheoretische Reflexion über das Beweisen gelingen und die Schülerinnen und Schüler somit beim Aufbau von Wissen über das Beweisen unterstützen.
Ergänzend wir an dieser Stelle auf die lehrkunst- und bildungsdidaktische Analyse des Lehrstücks in Gerwig (2015, 182-191) verwiesen.

6. Zur Lehrplanpassung

Das über 2.300-Jahre alte Werk Euklids ist keineswegs ein verstaubtes Relikt der Vergangenheit. Im Gegenteil: Es ist von erstaunlicher Aktualität. Es zeigt eindrücklich, wie deduktives Argumentieren zur Aufklärung problemhaltiger Phänomene genutzt werden kann, womit es

einen wertvollen Beitrag beim Aufbau von Wissen über das Begründen und Beweisen auf Seiten der Schülerinnen und Schüler liefern kann. Zudem tritt neben das Aufzeigen der Beweisbedürftigkeit auch die Möglichkeit einer allgemeinen Motivation des Beweisens, d. h. eine Erklärung über das, „was das Beweisen ist, warum es in der Mathematik eine so große Rolle spielt und wie das mathematische Beweisen zu einer denkenden Erfassung der Welt beiträgt“ (Jahnke/Ufer 2015, 342). Das hier beschriebene Lehrstück beginnt bei einer geometrischen Besonderheit des Kreisradius, d. h. bei einem reizvollen, problemhaltigen Phänomen (vgl. Winter 1983; Hadas et al. 2000), welches Schritt für Schritt logisch auf eine allgemeingültige Gegebenheit zurückgeführt wird – ein Vorgehen, dass der euklidischen Arbeitsweise entspricht und deren Entdeckung schließlich vorentlastet. Die Aufklärung dieses erstaunlichen, sich aber in realen Weltdingen zeigenden Phänomens, die Suche nach einer Begründung, die Formulierung und Beantwortung der Warum-Frage, lassen darüber hinaus erleben, was es heißt, mathematisch zu denken: „Seltsames [kann] aus Selbstverständlichem ohne Rest verstanden werden“ (Wagenschein 2008, 125). Im Lehrstück wird insb. der Übergang vom alltagsnahen Begründen zum mathematischen Argumentieren gefestigt, wodurch die Grundlagen zu einer verstehensorientierten Erarbeitung des mathematischen Beweisens gelegt werden und schließlich der Aufbau von fachlichem Wissen zum Begründen und formal-deduktiven Beweisen unterstützt wird. Die vorgestellte Unterrichtseinheit liefert damit sowohl einen Beitrag zum Erwerb der Kompetenz „mathematisch argumentieren“, als auch zur Entwicklung der in den Bildungsstandards (KMK 2012) formulierten Eigenschaft, dass sich Argumentations- und Problemlöseprozesse auf bereits Bewiesenes bzw. bereits erfolgreich Erprobtes beziehen. Beweisprodukte sollten im Unterricht nicht von der *Tätigkeit* des Beweisens abgeschnitten werden, eine Vielzahl „durchgenommener“ Beweise kann nicht verdeutlichen, was es mit dem Beweisen auf sich hat, dass diesen nämlich ein natürliches Erkenntnismittel der Mathematik und keine sinnlose Spielerei und komplizierte Erfindung der Mathematiker darstellt.
Das hier beschriebene Lehrstück kann am Anfang eines Enkulturationsprozesses in die Argumentationskultur der Mathematik stehen und zur festen Basis weiterer Beweisuntersuchungen und -entwicklungen werden.

7. Stichwort „Lehrkunstdidaktik“
Die von Hans Christoph Berg und Theodor Schulze ab Mitte der 1980er-Jahre entwickelte Lehrkunstdidaktik (vgl. Berg/Schulze 1995) basiert auf Martin Wagenscheins genetischer Methode und seinen exemplarischen, für die Fächer Mathematik und Physik skizzierten Unterrichtsbeispielen. Sie befasst sich mit wissenschaftlich oder kulturell bedeutenden Ereignissen, welche die Sicht auf Kultur, Kunst und Wissenschaft maßgeblich verändert und beeinflusst haben und bis heute gelten. Im Lehrstückunterricht werden die Schülerinnen und Schüler in die Ausgangslage früherer Entdecker, Urheber oder Autoren versetzt, von welcher aus sie „nach-entdeckend“ die Wege zu einer Entdeckung, einer Erfindung oder einem geschaffenen Werk im eigenen Lern- und Bildungsprozess erleben (Wildhirt 2008, 63). Ein Lehrstück ist eine in sich geschlossene mehrdimensional oder interdisziplinär angelegte Unterrichtseinheit, die einen vollständigen Lernzyklus umfasst (vgl. Übersicht auf www.lehrkunst.ch). Die Lehrkunstdidaktik ist den bildungstheoretischen Unterrichtskonzeptionen zuzuordnen (Klafki ab 1959; Berg/Gerwig/Wildhirt 2013, 16f), sie ist gleichzeitig tief in den Klassikern der Pädagogik verwurzelt. Lehrstückunterricht ist gleichermaßen erfahrungsorientiert, entdeckungsorientiert und handlungsorientiert (vgl. Wildhirt/Jänichen/Berg 2015).

Literatur

Barzel, Bärbel; Büchter, Andreas; Leuders, Timo (2007): *Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II.* Cornelsen Scriptor. Berlin.

Berg, Hans Christoph; Schulze, Theodor (1995): *Lehrkunst. Lehrbuch der Didaktik.* Luchterhand. Neuwied.

Berg, Hans Christoph (2009): *Die Werkdimension im Bildungsprozess. Das Konzept der Lehrkunstdidaktik.* Band 1 der Reihe „Lehrkunstdidaktik“. hep-Verlag. Bern.

Berg, Hans Christoph; Gerwig, Mario; Wildhirt, Susanne: (2013): *Lehrkunstdidaktik 2013. Weiter auf dem Weg zu einer konkreten und allgemeinen Bildungsdidaktik.* In: Zierer, Klaus (Hrsg.): *Jahrbuch für Allgemeine Didaktik 2013.* Schneider Verlag Hohengehren. Baltmannsweiler. S. 11-31.

Bentley, Wilson Alwyn (2000): *Snowflakes in Photographs.* Dover Publications. Mineola, New York. [Erstausgabe

dieser Edition: 1931. Original: Snow crystals, 1898].
Bruder, Regina; Hefendehl-Hebeker, Lisa; Schmidt-Thieme, Barbara; Weigand, Hans-Georg (Hrsg.) (2015): *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Springer Spektrum. Heidelberg.
Brunner, Esther (2013): *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I. Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterscheide und leistungsförderliche Aspekte.* Waxmann. Münster.
Brunner, Esther (2014): *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Springer-Spektrum. Berlin.
Cowen, Painton (1979): *Die Rosenfenster der gotischen Kathedralen.* Verlag Herder. Freiburg.
Freud, Robert (Hrsg.) (1990): *Große Augenblicke aus der Geschichte der Mathematik*. BI-Wissenschaftsverlag. Mannheim, Wien, Zürich.
Gerwig, Mario (2015): *Beweisen verstehen im Mathematikunterricht. Axiomatik, Pythagoras und Primzahlen als Exempel der Lehrkunstdidaktik.* Springer-Spektrum. Wiesbaden.
Hadas, Nurit; Hershkowitz, Rina; Schwarz, Baruch (2000): *The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments.* Educational Studies in Mathematics, 44, S. 127-150.
Haeckel, Ernst (^{3}2009): *Kunstformen der Natur. Hundert Illustrationstafeln mit beschriebenem Text, allgemeine Erläuterung und systematische Übersicht.* marixverlag. Wiesbaden. [Erstausgabe: 1899]
Heinrich, Frank; Bruder, Regina; Bauer, Christina (2015): *Problemlösen lernen*. In: Bruder et al. (2015), S. 279-301.
Hoehn, Alfred; Huber, Martin (2005): *Pythagroas. Erinnern Sie sich?* Orell Füssli Verlag. Zürich.
Jahnke, Hans Niels; Ufer, Stefan (2015): *Argumentieren und Beweisen*. In: Bruder et al. (2015), S. 331-355.
KMK (Hrsg.) (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf
Meschkowski, Herbert (1961): *Denkweisen großer Mathematiker. Ein Weg zur Geschichte der Mathematik*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag. Braunschweig.
Popp, Walter (1999): *Fachdidaktik Mathematik. Ein entwicklungsgeschichtlicher Ansatz*. Aulis-Verlag Deubner. Köln.
Rényi, Alfréd (1966): *Sokratischer Dialog.* In: Neue Sammlung. Göttinger Blätter für Kultur und Erziehung. 6. Jahrgang. Vandenhock & Ruprecht. Göttingen. S. 284-304.
Wagenschein, Martin (^{4}2008): *Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch.* Beltz. Weinheim und Basel. [Erstausgabe: 1968]
Wagenschein, Martin (^{4}2009): *Naturphänomene sehen und verstehen. Genetische Lehrgänge. Das Wagenschein-Studienbuch.* Herausgegeben von Hans Christoph Berg. hep-Verlag. Bern.
Wildhirt, Susanne (2008): *Lehrstückunterricht gestalten*. hep-Verlag. Bern.
Wildhirt, Susanne; Jänichen, Michael; Berg, Hans Christoph (2015): *Lehrstückunterricht.* In: Wiechmann, Jürgen; Wildhirt, Susanne (Hrsg.): *Zwölf Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis.* Beltz-Verlag. Weinheim. S. 111-128.
Winter, Heinrich (1983): *Zur Problematik des Beweisbedürfnisses*. Journal für Mathematik-Didaktik, 1, S. 59-95.
Wußing, Hans; Arnold, Wolfgang (1978): *Biographien bedeutender Mathematiker. Eine Sammlung von Biographien.* Aulas Verlag. Köln.

Zum Autor

Dr. Mario Gerwig (Jg. 1984) ist Lehrer für Mathematik und Chemie am Gymnasium Leonhard, Basel (Schweiz), sowie Vorstandsmitglied des Vereins LEHRKUNST.ch. 2014 promovierte er bei Hans Christoph Berg/Philipps-Universität Marburg und Norbert Hungerbühler/ETH Zürich mit einer (auch unterrichtspraktischen) Arbeit zum Thema „Beweisen verstehen – Bildung durch Lehrkunst im Mathematikunterricht". Die Arbeit erschien 2015 im Springer-Verlag. Kontakt: mario.gerwig@lehrkunst.ch